

ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 20.11.2023

Тема: «Производная. Правила вычисления производных. Производные основных элементарных функций»

1. Новый материал (конспект в тетрадь)

Понятие производной

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при Δx , стремящемся к нулю.

Производная функции f в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (читается: «Эф штрих от x_0 »).

Определение: операция нахождения производной называется дифференцированием.

Правила вычисления производных

Правило 1. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то их сумма дифференцируема в этой точке и

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных.*

Правило 2. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то их произведение дифференцируемо в этой точке и

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие. Если функция u дифференцируема в x_0 , а C — постоянная, то функция Cu дифференцируема в этой точке и

$$(Cu)' = Cu'.$$

Коротко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Правило 3. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 и функция v не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{u}{v}$ также дифференцируемо в x_0 и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Таблица производных (таблицу переписать в тетрадь или на плотный картон)

Производные основных функций		Производные сложных функций	
1	$(c)' = 0$		
2	$(x)' = 1$		
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	16	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
4	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	17	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
5	$(e^x)' = e^x$	18	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	19	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	20	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	21	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9	$(\sin x)' = \cos x$	22	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

10	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	23	$(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	24	$(\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	25	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	26	$(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	27	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
15	$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	28	$(\operatorname{arccotg} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$

Примеры:

■ Пример 1. Найдём производные функций:

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, поэтому

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{x^2}{x^3 + 1}\right)' &= \frac{(x^2)'(x^3 + 1) - x^2(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x(x^3 + 1) - x^2((x^3)' + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x(x^3 + 1) - x^2(3x^2 + 0)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Для любого целого n и любого x ($x \neq 0$ при $n \leq 1$)
 $(x^n)' = nx^{n-1}$.

■ **Пример 2.** Найдём производные функций:

а) $f(x) = x^{-5}$; б) $f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$.

а) $(x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$;

б) $\left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = 3(x^7)' - 5(x^{-3})' = 3 \cdot 7x^6 - 5(-3)x^{-4} =$
 $= 21x^6 + \frac{15}{x^4}$.

Пример 3. Найти производную

а) $y = x^5 \cdot \cos x$

а)

б) $y = \frac{4x-1}{3x+5}$

б)

а) По правилу произведения получаем

$$y' = (x^5 \cdot \cos x)' = (x^5)' \cdot \cos x + x^5 \cdot (\cos x)' = 5x^4 \cdot \cos x + x^5 \cdot (-\sin x).$$

б) Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$y' = \left(\frac{4x-1}{3x+5}\right)' = \frac{(4x-1)'(3x+5) - (4x-1)(3x+5)'}{(3x+5)^2}$$

$$y' = \frac{4(3x+5) - (4x-1) \cdot 3}{(3x+5)^2}$$

$$y' = \frac{12x+20-12x+3}{(3x+5)^2} = \frac{23}{(3x+5)^2}$$

Домашнее задание

Проработать конспект по тетради

Правила вычисления производных (выучить!!!)

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(cu)' = cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru